FUNCTIONAL STATISTICS AND TOPOLOGICAL SPECTROSCOPY FOR QUANTUM INFORMATICS

N.S. Perminov, Sh.R. Shakirov

In this work the synthesis of a mathematical technology necessary for statistical and parametric control of a linear component of a quantum computer. Using the methods of the transfer function and complex statistics, the topology of the spectrum of a point-like two-particle quantum system located in a resonator and having a controllable memory is studied.

Keywords: functional statistics, topological spectroscopy, quantum informatics.

УДК 514.76

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ К РАССЛОЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ

К.В. Полякова[1]

1 *kapolyakova@kantiana.ru*; Балтийский федеральный университет им. И. Канта

Касательное расслоение к расслоению линейных реперов рассматривается в корепере и двойственном ему репере. Построены базисные векторы касательного и соприкасающегося пространств в натуральном репере. Найдены скобки Ли базисных векторов соприкасающегося пространства.

Ключевые слова: Векторнозначные дифференциальные формы, соприкасающееся пространство, пфаффовы производные.

Рассмотрим m-мерное гладкое многообразие X_m и некоторую окрестность, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i $(i,j,k,\ldots=1,\ldots,m)$. Структурные формы ω^i многообразия X_m удовлетворяют уравнениям $d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j$ [1]. Выражение для дифференциала точки A расслоения касательных линейных реперов $L(X_m)$ запишем в виде

$$dA=\omega^i e_i+\omega^i_j e^j_i. \tag{1}$$

Совокупность векторов $e=\{e_i,e^k_j\}$ образует допустимый репер касательного пространства $T_A L(X_m)=span(e_i,e^k_j)$ к расслоению $L(X_m)$ в точке A, $\dim T_A L(X_m)=m+m^2$. Этот репер является двойственным к кореперу $\{\omega^i,\omega^j_k\}$, т.е.

$$\omega^i(e_j)=\delta^i_j,\ \omega^i(e^k_j)=0,\ \omega^i_j(e_k)=0,\ \omega^i_j(e^k_l)=\delta^i_l\delta^k_j.$$

Касательное пространство $T_A L(X_m)$ содержит вертикальное пространство $V_A=[e^j_i]$, касательное к слою в точке A; $\dim V_A=m^2$. Вертикальные базисные векторные поля e^j_i можно считать фундаментальными векторными полями структурной группы расслоения.

Для векторов репера $e=\{e_i,e^k_j\}$ в натуральном репере $\{\partial_i=\partial/\partial x^i,\ \partial^k_j=\partial/\partial x^j_k\}$ имеем

$$\begin{pmatrix} e_i & e^k_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial_l & \partial^p_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}^l_i & 0 \\ -x^q_{si}x^s_p & -\delta^q_j x^k_p \end{pmatrix},$$

где $x^i_{jk}=x^i_{kj}$; $\overset{*}{x}{}^i_j$ — матрица, обратная к матрице x^i_i. Переменные x^i_j, x^i_{jk} являются слоевыми координатами. Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^j_k\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^j_k\}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i_l & 0 \\ -x^j_{ks}x^s_l & -\delta^j_p \overset{*}{x}{}^q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^l \\ dx^p_q \end{pmatrix}.$$

Деривационная формула (1) в натуральном репере имеет вид: $dA = dx^i\partial_i + dx^i_j\partial^j_i$.

Форма dA является векторнозначной 1-формой со значениями в касательном пространстве $T_AL(X_m)$, т.е. тангенциальнозначной 1-формой. Форма dA соответствует тождественному преобразованию касательного и кокасательного пространств к многообразию $L(X_m)$ и является канонической формой расслоения $L(X_m)$. Обозначим множество всех форм со значениями в пространстве $T_AL(X_m)$ через $\Omega^1_1 = \Omega_1(T_AL(X_m))$.

Векторы (невертикальные e_i и вертикальные e^k_j) репера 1-го порядка удовлетворяют уравнениям [7]:

$$de_i - e_j\omega^j_i - e^j_k\omega^k_{ji} = e_{ij}\omega^j + e^k_{ij}\omega^j_k, \quad de^j_i + e^k_i\omega^j_k = e^j_{ik}\omega^k + e^{jl}_{ik}\omega^k_l, \tag{2}$$

причем для совокупности векторов 2-го порядка $e' = \{e_{ij}, e^k_{ij}, e^j_{ik}, e^{jl}_{ik}\}$ из соприкасающегося пространства $T^2_AL(X_m)$ ($\dim T^2_AL(X_m) = \frac{1}{2}(m^2+m)(m^2+m+3)$) справедливы условия симметрии: $e_{ij}=e_{ji}$, $e^k_{ij}=e^k_{ji}$, $e^{jl}_{ik}=e^{lj}_{ki}$.

Для векторов из совокупности e' справедливы разложения

$$e^{jl}_{ik} = x^j_s \frac{\partial^2}{\partial x^i_s \partial x^k_p} x^l_p, \quad e^j_{ik} = -x^j_{sk}e^s_i + x^q_{pk}e^{jp}_{iq} - x^j_l \overset{*}{x}{}^s_k \frac{\partial^2}{\partial x^i_l \partial x^s},$$

$$e_{ij} = x^k_{ij}e_k + (x^k_{lij} - x^s_{ij}x^k_{ls})e^l_k + x^k_{li}e^l_{kj} + x^k_{lj}e^l_{ki} + x^k_{sj}x^q_{pi}e^{sq}_{kp} + \overset{*}{x}{}^l_i \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k} \overset{*}{x}{}^k_j.$$

Таким образом, получили подвижной репер 2-го порядка $e^2 = \{e, e'\}$ соприкасающегося пространства $T^2_AL(X_m)$. Векторы из совокупности e' удовлетворяют сравнениям по модулю базисных форм ω^i, ω^j_k расслоения $TL(X_m)$:

$$de^{jl}_{ik} \cong 0, \quad de^j_{ik} \cong e^{jl}_{is}\omega^s_{lk} - e^l_i\omega^j_{lk}, \quad de_{ij} \cong e^k_{il}\omega^l_{kj} + e_k\omega^k_{ij} + e^l_{kj}\omega^k_{li} + e^l_k\omega^k_{lij},$$

из которых видно, что касательное пространство 2-го порядка $T^2_AL(X_m)$ содержит следующие подпространства: $A = span(e^{jl}_{ik}) \subset B = span(e^j_i, e^j_{ik}, e^{jl}_{ik})$.

Перепишем уравнения (2) следующим образом:

$$de_i - e^j_k\omega^k_{ji} = \hat{e}_{ij}\omega^j + \hat{e}^k_{ij}\omega^j_k, \quad de^j_i = \hat{e}^j_{ik}\omega^k + \hat{e}^{jl}_{ik}\omega^k_l, \tag{3}$$

где $\hat{e}_{ij} = e_{ij}$, $\hat{e}^j_{ik} = e^j_{ik}$ — базисные пфаффовы производные; $\hat{e}^k_{ij} = e^k_{ij} + \delta^k_i e_j$, $\hat{e}^{jl}_{ik} = e^{jl}_{ik} - \delta^j_k e^l_i$ — слоевые пфаффовы производные базисных векторов e_i, e^j_i. Векторы из совокупности $\hat{e}' = \{\hat{e}_{ij}, \hat{e}^{j}_{ik}, \hat{e}^{k}_{ij}, \hat{e}^{jl}_{ik}\}$ назовем адаптированными пфаффовыми производными, а репер $\hat{e}^2 = \{e, \hat{e}'\}$ — адаптированным репером 2-го порядка.

Продолжая уравнения (3), получим сравнения

$$d\hat{e}^{jl}_{ik} \cong 0,\ d\hat{e}^{j}_{ik} \cong \hat{e}^{jl}_{is}\omega^{s}_{lk},\ d\hat{e}^{k}_{ij} \cong \hat{e}^{lk}_{sj}\omega^{s}_{li} - e^{l}_{j}\omega^{k}_{li} + e^{k}_{l}\omega^{l}_{ji} + \delta^{k}_{i} e^{l}_{s}\omega^{s}_{lj},$$
$$d\hat{e}_{ij} \cong \hat{e}^{k}_{il}\omega^{l}_{kj} + \hat{e}^{l}_{kj}\omega^{k}_{li} + e^{l}_{k}\omega^{k}_{lij},$$

из которых следует, что соприкасающееся пространство $T^2_A L(X_m)$ содержит следующие подпространства: $\hat{A} = span(\hat{e}^{jl}_{ik}) \subset \hat{B} = span(\hat{e}^{j}_{ik}, \hat{e}^{jl}_{ik}), D = span(e^{j}_{i}, \hat{e}^{j}_{ik}, \hat{e}^{jl}_{ik})$.

Произвольный касательный вектор $u = u^i e_i + u^i_j e^j_i \in T_A L(X_m)$ относительно инвариантен (инвариантен при фиксации точки A базы $L(X_m)$), если

$$du^i = u^i{}_j\omega^j + u^{ik}_j\omega^j_k, \quad du^i_j + u^k\omega^j_{ik} = u^i_{jk}\omega^k + u^{il}_{jk}\omega^k_l.$$

Тогда $du = \hat{u}_i\omega^i + \hat{u}^i_j\omega^j_i$, где

$$\hat{u}_i = u^i{}_j e_j + u^k_{ji} e^j_k + u^j \hat{e}_{ji} + u^k_j \hat{e}^j_{ki}, \quad \hat{u}^i_j = u^{ki}_j e_k + u^{ki}_{lj} e^l_k + u^k \hat{e}^{\ i}_{kj} + u^k_l \hat{e}^{li}_{kj} \qquad (4)$$

— базисные и слоевые (вертикальные) пфаффовы производные вектора u, соответственно. Базисные и слоевые (вертикальные) пфаффовы производные вектора являются производными по направлению невертикальных и вертикальных векторов, т.е. $\hat{u}_i = \partial_{e_i} u$, $\hat{u}^i_j = \partial_{e^i_j} u$. Элемент $du \in \Omega^2_1$ будем рассматривать как линейное отображение: $du(e_i) = \partial_{e_i} u$, $du(e^i_j) = \partial_{e^i_j} u$.

Лемма. *Для касательных векторов u, v справедливо равенство $\partial_v u = du(v)$.*

Действительно, для левой части имеем $\partial_v u = v^i \partial_{e_i} u + v^i_j \partial_{e^j_i} u = v^i \hat{u}_i + v^i_j \hat{u}^i_j$. Справа воспользуемся отображением du, разложением по базису вектора v и условиями сопряженности базисных векторов и ковекторов.

Утверждение. *Скобка $[u, v]$ векторов пространства $T_A L(X_m)$ вычисляется по формуле*

$$[u, v] = dv(u) - du(v) = \hat{v}_i\omega^i(u) + \hat{v}^i_j\omega^j_i(u) - \hat{u}_i\omega^i(v) - \hat{u}^i_j\omega^j_i(v). \qquad (5)$$

Используя условия сопряженности, получим

$$[u, v] = \hat{v}_i u^i + \hat{v}^i_j u^j_i - \hat{u}_i v^i - \hat{u}^i_j v^j_i.$$

С помощью обозначений (4) приведем скобку к виду $[u, v] = [u, v]^i e_i + [u, v]^i_j e^j_i$, где базисные и слоевые координаты скобки даются формулами

$$[u, v]^i = v^i{}_j u^j - u^i{}_j v^j + v^{ik}_j u^j_k - u^{ik}_j v^j_k + v^j u^i_j - u^j v^i_j,$$
$$[u, v]^i_j = v^i_{jk} u^k - u^i_{jk} v^k + v^{ik}_{lj} u^l_k - u^{ik}_{jl} v^l_k - v^i_k u^k_j + u^i_k v^k_j.$$

В частности, для вертикальных векторов $\overset{1}{v}, \overset{2}{v}$ имеем $[\overset{1}{v}, \overset{2}{v}] = [\overset{1}{v}, \overset{2}{v}]^i_j e^j_j$, где

$$[\overset{1}{v}, \overset{2}{v}]^i_j = \overset{2}{v}{}^{ik}_{jl}\, \overset{1}{v}{}^l_k - \overset{1}{v}{}^{ik}_{jl}\, \overset{2}{v}{}^l_k - \overset{2}{v}{}^i_k\, \overset{1}{v}{}^k_j + \overset{1}{v}{}^i_k\, \overset{2}{v}{}^k_j.$$

Поскольку произведение векторов (векторных полей) соответствует композиции их действий на функциях, то из $u(f) = df(u) = u^i f_i + u^i_j f^j_i$ можно вычислить $uv(f) = u(v^i f_i + v^i_j f^j_i), vu(f) = uv(u^i f_i + u^i_j f^j_i)$, а при вычитании вычисленных выражений получим $uv(f) - vu(f) = [u, v]^i f_i + [u, v]^i_j f^j_i$, или

$$(uv - vu)(f) = [u, v]^i \partial_{e_i} f + [u, v]^i_j \partial^j_i f.$$

Лемма. *Для линейного отображения* $de : T_A L(X_m) \to T^2_A L(X_m)$ *из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка имеем:*

$$de_i(e_j) = \hat{e}_{ij} + e^l_k (x^s_{li} x^k_{sj} - x^k_{lij}),\ de^j_i(e_k) = \hat{e}^j_{ik},$$
$$de^j_i(e^l_k) = \hat{e}^{jl}_{ik},\ de_i(e^k_j) = \hat{e}^{\,k}_{ij} + e^q_p(\delta^p_j x^k_{qi} - \delta^k_q x^p_{ji} - \delta^k_i x^p_{qj}).$$

Утверждение. *Скобки Ли векторов репера e вычисляются по формулам:*

$$[e_i, e_j] = (x^p_{kj} x^l_{pi} - x^p_{ki} x^l_{pj}) e^k_l,\ [e^i_j, e^l_k] = \delta^i_k e^l_j - \delta^l_j e^i_k,$$
$$[e^i_j, e_k] = \delta^i_k e_j + (\delta^q_j x^i_{pk} - \delta^i_p x^q_{jk} - \delta^i_k x^q_{pj}) e^p_q.$$

Для доказательства можно пользоваться формулой (5) и деривационными формулами (3) или прямыми вычислениями, используя координатные представления базисных векторов в натуральном репере.

Используя разложения векторов репера e^2 в натуральном репере, можно вычислить, например, следующие скобки:

$$[e^{jl}_{ik}, e^q_p] = \delta^j_p e^{ql}_{ik} + \delta^l_p e^{jq}_{ik},\ [e^{jl}_{ik}, e^{bd}_{ac}] = \delta^b_i \delta^d_k e^{lj}_{ca} + \delta^d_i \delta^b_k e^{lj}_{ac} - \delta^j_a \delta^l_c e^{bd}_{ik} - \delta^l_a \delta^j_c e^{db}_{ik},$$
$$[e^{jl}_{ik}, e_s] = x^p_{qs}[e^{jl}_{ik}, e^q_p] = x^i_{ps} e^{pl}_{ik} + x^l_{ps} e^{jp}_{ik},\ [e^j_{ik}, e_l] = -x^j_{lk}(e_i - x^p_{qi} e^q_p) + x^p_{ql}[e^{jl}_{ik}, e^q_p].$$

Дифференциал d переводит векторы расслоения $TL(X_m)$ в векторнозначные 1-формы, т.е. $d : \Omega^1_0 = T_A L(X_m) \to \Omega_1(dT_A L(X_m)) \subset \Omega^2_1$. Зададим оператор $\bar{d} = d - \omega^i_j de^j_i$, в котором из векторнозначных 1-форм пространства $\Omega^2_1 = \Omega_1(T^2_A L(X_m))$ с помощью отображения $-\omega^i_j de^j_i$ удаляется составляющая со слоевыми (вертикальными) адаптированными пфаффовыми производными. Рассмотрим действие оператора $\bar{d} = d - \omega^i_j de^j_i$ на касательных векторах и вычислим проекции отображений $\bar{d}$ на слой, т.е. при фиксации точки базы X_m получим

$$\bar{d}(e_i)|_{\omega^i=0} = e_j \bar{\omega}^j_i + e^j_k \bar{\omega}^k_{ji}, \quad \bar{d}(e^j_i)|_{\omega^i=0} = 2e^j_k \bar{\omega}^k_i,$$
$$\bar{d}(u)|_{\omega^i=0} = [(u^{ki}_j + \delta^k_j u^l) e_k + (u^{ki}_{lj} - \delta^i_l u^k_j + \delta^k_j u^i_l) e^l_k] \bar{\omega}^j_i,$$

где $\bar{\omega} = \omega|_{\omega^i=0}$. Для произвольного вертикального вектора $v = v^i_j e^j_i$ координаты v^i и их пфаффовы производные v^{ik}_j равны нулю, тогда $dR_g(v) = \bar{d}(v)|_{\omega^i=0} = (v^{ki}_{lj} - \delta^i_l v^k_j + \delta^k_j v^i_l)\pi^j_i e^l_k$, т.е. произвольный вертикальный вектор переводится в вертикальный. Отображение $\bar{d}|_{\omega^i=0}$ осуществляет действие структурной группы в расслоении $TL(X_m)$, $dR_g = \bar{d}|_{\omega^i=0}$, переводя вертикальные базисные векторы e^j_i в вертикальные.

Литература

1. Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. – Т. 1. – С. 139 – 189.

TANGENT BUNDLE TO LINEAR FRAME BUNDLE

K.V. Polyakova

The tangent bundle to linear frame bundle is considered in coframe and dual frame. Basic vectors of tangent and osculating spaces in a holonomic frame field are constructed. Lie brackets of basic vectors fields of osculating space are found.

Keywords: Vector valued form, osculating space, Pfaffian derivatives.

УДК 514.764

АЛГЕБРА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА И ЕЁ СТАЦИОНАРНАЯ ПОДАЛГЕБРА

В.А. Попов[1]

1 *vlapopov@gvail.com*; Финансовый университет при Правительстве Российской Федераии,Москва, Россия

Рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии M, её стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ и центр $\mathfrak{z}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа,порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{h}\bigcap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{h}\bigcap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебы $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p}+\mathfrak{r}=\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{r}$ – радикал $\mathfrak{g}$, имеет место $(\mathfrak{p}+\mathfrak{z})\cap\mathfrak{h} = \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$, то H замкнута в G.

Ключевые слова: Риманово многобразие, алгебра Ли, аналитическое продолжение, векторное поле, группа Ли, замкнутая подгруппа.

Однородное пространство определяется группой Ли G и её замкнутой подгруппой Ли H. Локально однородное риманово аналитическое пространство определяется алгеброй $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга и её стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$, и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Локально однородную риманову аналитическую метрику можно аналитически продолжить до метрики однородного пространства тогда и только тогда, когда H замкнута в G.

В основе дальнейших рассуждений лежат понятия векторныго поля Киллинга и связанной с ним локальной однопараметрической группы изометрий, а также локальной группы (chunk of a group) локальных изометрий.